УДК 631.67
Ветренко Е.А., канд.тех.наук, доцент,
ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет», г. Волгоград

ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЛАГОПЕРЕНОСА В НЕНАСЫЩЕННЫХ ПОЧВОГРУНТАХ

Представлены возможности применения математического моделирования для рассмотрения процесса влагопереноса в почве при внутрипочвенном орошении.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ВЛАГОПЕРЕНОС, ПОЧВОГРУНТ, ВЛАЖНОСТЬ ПОЧВЫ

UDC
Vetrenko E.A., Cand.Tech.Sci., Associate Professor,
Volgograd State Agricultural University, Volgograd City

SUBSTANTIATION OF THE SELECTION OF THE MATHEMATIC MODEL FOR MOISTURE TRANSFER IN THE UNSATURATED SOIL

The possibilities of applying mathematic modeling for investigation of the moisture transfer process in soil at the inter-soil irrigation are presented here.

KEY WORDS: MATHEMATIC MODEL, MOISTURE TRANSFER, SOIL, MOISTURE OF SOIL

Недостаточная изученность теоретических основ внутрипочвенного орошения отрицательно сказывается на полном использовании всех возможностей и преимуществ этого способа орошения. Основой теоретических исследований служит математическое моделирование процессов влагопереноса в почве. Создаваемая и используемая при этом математическая модель должна удовлетворять ряду следующих требований:

- она должна быть по возможности более простой;
- в уравнения должны входить только хорошо изученные гидрофизические характеристики почвы;
- должна быть разработана методика определения характеристик почвогрунтов, не требующая уникальной аппаратуры;
- алгоритм и программа расчетов должны быть в достаточной степени универсальными, чтобы их можно было применять для широкого диапазона условий, имеющихся в природе;
- расчеты необходимо проводить на серийных ЭВМ.

При рассмотрении процесса влагопереноса в почве при внутрипочвенном орошении делают, как правило, ряд допущений. Считается, что во влаге отсутствуют растворенные соли, процесс движения влаги является изотермическим, скелет грунта недеформируем, давление почвенного воздуха равно атмосферному давлению, почвенная влага несжимаема, влагоперенос происходит под действием капиллярных, гравитационных сил и всасывающей силы корней растений, грунт - однородно-анизотропный.

При неполном насыщении грунта уравнение движения влаги записывают на основе закона Дарси, физический смысл которого заключается в том, что скорость движения влаги пропорциональна градиенту напора.

В векторной форме этот закон имеет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = div[K(\Psi) gradH] \qquad (1)$$

где W- объемная влажность почвы; t- время; $K(\psi)$-коэффициент влагопроводности, зависящей от координат x,y,z; $H = \psi(W) \pm z$ - напор; $\psi\ (W) = \frac{P}{\gamma}$ - капиллярный потенциал (эквивалентное давление почвенной влаги); P- давление почвенной влаги.

В прикладных расчетах им обычно считают, что зависимость $\psi(W)$ однозначна, непрерывна и дифференцируема. При заданных ограничениях, Чайльдс и Коллис-Джорж предложили ввести понятие коэффициента диффузии влаги, который определяется следующим образом:

$$D(W) = K(W)\frac{\partial\Psi}{\partial W} \qquad (2)$$

Так как функция $\Psi(W)$ неубывающая, то коэффициент дифффузии D(W) принимает всегда только положительные значения.

Уравнение влагопереноса с учетом зависимости (2) принимает вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial W}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial W}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial W}{\partial z}\right) \pm \frac{\partial K}{\partial z} \qquad (3)$$

где $D_x(W), D_y(W), D_z(W)$- коэффициенты диффузии почвенной влаги в направлении осей x,y,z соответственно.

В связи с тем, что это уравнение позволяет описывать процесс влагопереноса в слоистых грунтах без применения разрывных функций и является работоспособным в зоне полного насыщения, оно является более удобным при моделировании передвижения влаги, чем уравнение (1).

Уравнение, описывающее передвижение влаги в ненасыщенной среде в вертикальном направлении, является частным случаем общего уравнения (3) влагопереноса. Связывают его с именем Клюта и оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D(W)\frac{\partial W}{\partial z}\right] + \frac{\partial K(W)}{\partial z} \qquad (4)$$

Уравнение (4) называют также уравнением диффузии. Но это не означает, что процесс передвижения влаги в ненасыщенных почвогрунтах полностью идентичен диффузии, которая является перемещением частиц в направлении меньшей их концентрации, обусловленным их тепловым движением. Передвижение влаги в почве обусловлено соответствующими силовыми полями.

Из анализа механизма передвижения влаги следует, что при поступлении воды в почву часть ее абсорбируется почвой, остается неподвижной и не принимает участия в дальнейшем передвижении. Если исходить из того, что вода, проникая в почву, увлажняет ее до некоторой предельной влажности и дальнейшее передвижение влаги описывается уравнением диффузии, то одномерное уравнение переноса влаги в горизонтальном направлении имеет следующий вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right) + q(W) \qquad (5)$$

где q(W)- расход воды в единицу времени, идущий на смачивание, т.е. увеличение толщины слоя воды вокруг частиц почвы.

Математически это означает, что для x, удовлетворяющих неравенству

$0 < x < \xi$, где ξ - подвижная граница фронта смачивания, передвижение влаги описывается уравнением:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right); q(W) = 0 \quad (6)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$W(0,t) = W_1; W(x,0) = W_0; W|_{x=\xi} = W_\xi \quad (7)$$

где W_1 полная влагоемкость; W_0 - начальная влажность.

На границе смачивания передвижение влаги описывается в этом случае уравнением:

$$q(W) = \left(W_\xi - W_0\right)\frac{d\xi}{dt} \qquad (8)$$

Уравнения (6) и (8) выражают мысль о том, что в начале процесса передвижение влаги характеризуется членом q(W), то есть вода идет на впитывание до влажности равной W_ξ и лишь после этого дальнейшее передвижение влаги характеризуется членом $\frac{\partial}{\partial x}\left(D(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right)$.

Некоторые авторы учитывали связанную влагу в теоретических расчетах, однако, многочисленные экспериментальные исследования указывают на возможность применения уравнения диффузии для описания процесса влагопереноса при различной начальной влажности. При этом процесс перехода свободной влаги в связанную влагу может быть отображен в коэффициенте диффузии D(W). Л.Е. Чернышевская исследовала влияние члена q(W) на характер процесса передвижения влаги. В результате было получено, что, в отличие от обычного уравнения диффузии, учет этого члена приводит к более резко выраженному фронту смачивания, что отвечает действительности. Но это дает лишь качественную оценку уравнения, учитывающего воду, переходящую в неподвижное состояние. Для получения количественных зависимостей необходимо иметь экспериментальные данные о зависимости расхода воды, переходящей в неподвижное состояние, от влажности почвогрунтов. Это, конечно, представляет теоретический интерес. Но, так как при внутрипочвенном орошении начальная влажность почвогрунтов обычно выше связанной влаги, то в уравнении (5) член q(W)=0 и математическая модель влагопереноса сводится к уравнению диффузии (4).

Если в начальный момент времени имеется неравномерное по глубине распределение влажности в почве (а именно: влажность слоев, близких к испаряющей поверхности больше, чем глубинных слоев), то, согласно диффузионной модели, влажность в относительно сухих слоях будет возрастать в моменты времени, близкие к начальному, как бы ни было велико испарение. Экспериментально, однако, часто наблюдается обратная картина: влажность в сухих слоях убывает при интенсивном испарении, несмотря на то, что градиент влажности направлен все еще к испаряющей поверхности. Это явление получило в дальнейшем название эффекта Адлера по фамилии ученого, который занимался исследованием данного вопроса. В результате им было предложено ввести в уравнение влагопереноса поправочный член и использовать для описания процесса переноса влаги в почвогрунтах следующую модель, которая носит название модели Аллера:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z} + A\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial z}\right) \qquad (9)$$

В работах В.А. Янгарбера методом Фурье разделения переменных было получение точное решение уравнения (9) в случае постоянных коэффициентов. Решение получается в виде сходящегося ряда. Рассмотренная модель Аллера представляет большой научный интерес, однако оценка величины введенных поправок показывает, что в природных условиях степень нестационарности процесса влагообмена такова, что можно использовать уравнение передвижения влаги в виде (4).

Рассмотренные выше математические модели, а также их приближенные решения основаны на дифференциальном уравнении влагопереноса параболического типа, при этом считается, что скорость перемещения границы фронта увлажнения принимает конечное значение. При переменной скорости перемещения границы фронта увлажнения $v(t)$ рассматривают гиперболическое уравнение влагопереноса, которое имеет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{D}{v^2(t)}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = D\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + F(W) \qquad (10)$$

В случае, когда граница фронта увлажнения описывается уравнением вида $z(t) = M\sqrt{t}$ и переменная скорость $v(t) = \frac{M}{2\sqrt{t}}$ было получено решение уравнения (10) в виде:

$$W_*(\xi) = \frac{W-W_0}{W_1-W_0} = \begin{cases} 0; \ \frac{1}{\sqrt{A}} \le \xi < \infty, A \neq \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{\int_0^{\xi}(1-A\xi^2)^K d\xi}{\int_0^{1/\sqrt{A}}(1-A\xi^2)^K d\xi}, 0 \le \xi \le \frac{1}{\sqrt{A}} \end{cases}, \qquad (11)$$

где $K=A^{-1}+1{,}5$; $A = \frac{4D}{M^2}$; $\xi = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}$; W_0 и W_1 начальная влажность почвы по глубине и на поверхности впитывания соответственно.

При A<2 выражение (11) принимает вид:

$$W_*(t) = \begin{cases} 0; \frac{1}{\sqrt{A}} \le \xi < \infty, A = \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{2\sqrt{A}\cdot\Gamma(A)^{-1}}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(A^{-1}-0{,}5)} \int_0^{\xi} (1 - A\xi^2)^K d\xi \,, 0 \le \xi \le \frac{1}{\sqrt{A}} \end{cases}, \quad (12)$$

где Г- гамма-функция.

Из формул (11) и (12) следует, что в почве имеются неувлажненная и увлажненная области, причем разделяющая их граница описывается уравнением:

$$z = 2A^{-0,5}\sqrt{Dt} = M\sqrt{t}. \quad (13)$$

Таким образом, из приведенного выше обзора следует, что существуют разнообразные формы уравнений влагопереноса. Поэтому возникает вопрос о выборе эффективной математической модели изучаемого процесса. При этом необходимо помнить о том, что описание процесса движения влаги в почве должно отражать основные физические закономерности, обеспечивать необходимую точность. В то же время выбранная форма уравнения не должна препятствовать созданию эффективного и быстродействующего вычислительного алгоритма и его экспериментальной проверке на наборе опытных данных. Исходя из этого, целесообразнее выбрать в качестве исходного наиболее распространенное диффузионное уравнение влагопереноса (4).

Следует заметить, что процессы влагопереноса в природе намного сложнее, чем приведенные их математические описания. При их рассмотрении, прежде всего, должны быть учтены процессы поглощения влаги корнями растений, находящихся в зоне аэрации. Математическое моделирование этого биологического объекта представляет собой довольно сложную задачу, поэтому многие исследователи не учитывали этот фактор при решении уравнений влагопереноса. Однако неучет транспирации влаги корнями растений может привести к значительным отклонениям в аналитических решениях по сравнению с натурными данными. Поэтому в своей работе мы использовали математическую модель передвижения влаги в почве с учетом функции отбора влаги корнями растений, которая в случае вертикального направления влагопереноса имеет следующий вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D(W)\frac{\partial W}{\partial z}\right] + \frac{\partial K}{\partial z} + F(z, W, t), (14)$$

где F(z,W,t) - член, учитывающий изменение влажности за счет растениями.

Аналогичное уравнение следует записать при передвижении влаги в горизонтальном направлении. Однако, учитывая особенность односторонней относительно ряда деревьев укладки увлажнителей исследуемой нами конструкции, следует различать направления передвижения влаги в сторону расположения дерева и от него. Это связано с тем, что сосущая сила корней способствует увеличению скорости передвижения влаги в направлении самого растения и, напротив, препятствует движению влаги в сторону междурядья. В связи с этим, при решении задачи о передвижении влаги в горизонтальном направлении будем рассматривать уравнение влагопереноса в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right) \pm F(x, W, t), \ (14^*)$$

где знак «+» соответствует передвижению влаги к дереву; знак «-» соответствует передвижению влаги в сторону от дерева, а также вдоль оси увлажнителя.

Уравнение (14) рассматривалось рядом исследователей, при этом, как правило, решение получали с использованием различных численных методов. В отдельных работах путем каких-либо преобразований были получены аналитические решения этого уравнения.